

Wykład III

Absorpcja i dyspersja

Widmo
Słońca

Absorpcja
światła

Kreacja
par
elektron
- dziura

Dryft/dyfuzja
nośników

Separacja
nośników

Zbieranie
nośników

ang. Light Management Methods

Wydajność konwersji energii słonecznej:

$$\eta = \frac{E_{wy}}{E_{we}}$$

$$\eta_{całkowite} = \eta_{absorpcja} \times \eta_{kreacja} \times \eta_{dryft/dyf} \times \eta_{separ} \times \eta_{zbierania}$$

Równania Maxwella

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

prawo Gaussa
dla pola elektrycznego

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

prawo Gaussa
dla pola
magnetycznego

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

prawo indukcji
Faradaya

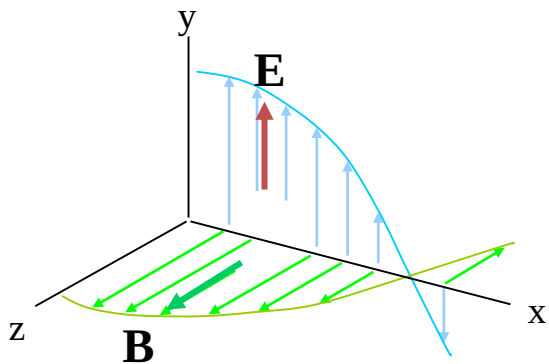
$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

prawo Ampera-Maxwella

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{J} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \mu_0 \left(I + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

Fala elektromagnetyczna w próżni



$$E(x, t) = E_m \cos(\omega t - kx)$$

$$B(x, t) = B_m \cos(\omega t - kx)$$

Z prawa Ampera – Maxwella w próżni ($\varepsilon = 1, \mu = 1$):

$$= 0$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{J} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

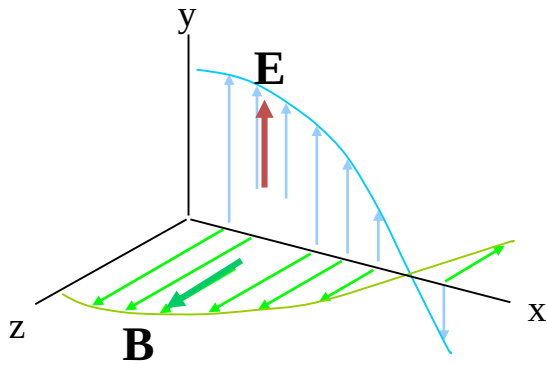
Dla

$$\vec{E} = [0, E(x, t), 0]$$

$$\vec{B} = [0, 0, B(x, t)]$$

$$\text{rot} \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & B(x, t) \end{vmatrix} = -\vec{j} \frac{\partial B(x, t)}{\partial x}$$

Fala elektromagnetyczna w próżni



$$-\vec{j} \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = \vec{j} \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E(x, t)}{\partial t}$$



$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$B(x, t) = B_m \cos(\omega t - kx)$$

$$E(x, t) = E_m \cos(\omega t - kx)$$

$$+kB_m \sin(\omega t - kx) = +\mu_0 \epsilon_0 \omega E_m \sin(\omega t - kx)$$

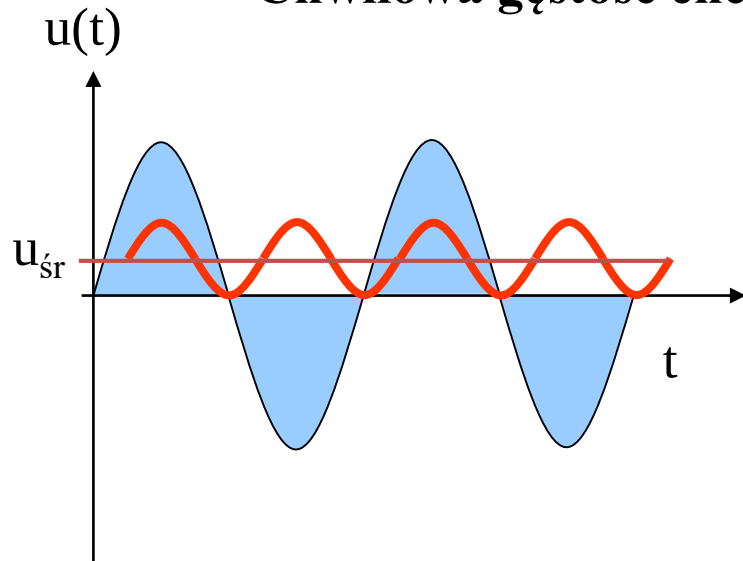
$$\frac{E(x, t)}{B(x, t)} = \frac{E_m}{B_m} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \frac{k}{\omega} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

W ośrodku

$$\frac{E(x, t)}{B(x, t)} = \frac{E_m}{B_m} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} = \frac{c}{n} = v$$

Energia fali elektromagnetycznej

Chwilowa gęstość energii pola elektromagnetycznego:



$$u(x, t) = \varepsilon \varepsilon_0 E^2(x, t)$$

Średnia gęstość energii po czasie
równym okresowi fali:

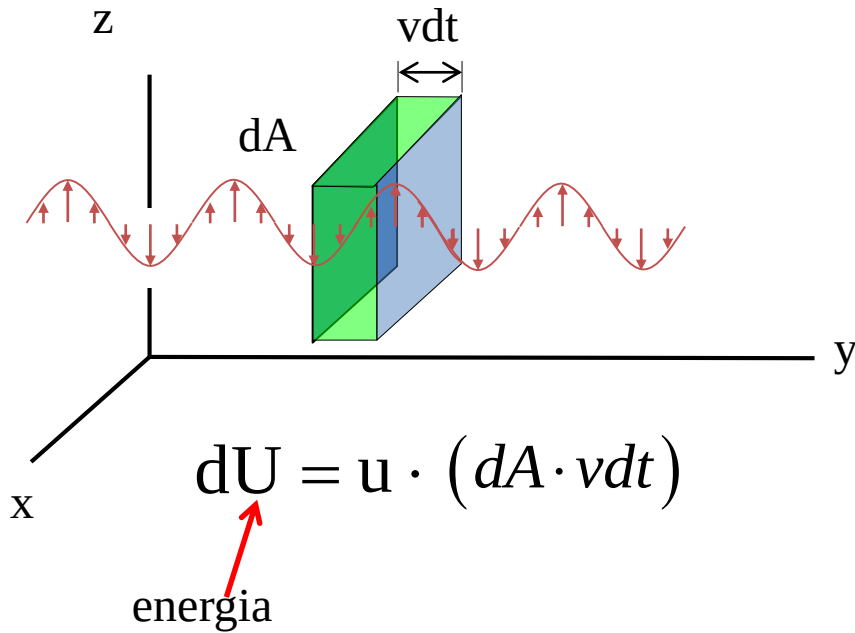
$$u_{sr} = \varepsilon \varepsilon_0 \langle E^2(x, t) \rangle = \varepsilon \varepsilon_0 E_m^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E_m^2$$

lub:

$$u_{sr} = \frac{1}{2\mu\mu_0} B_m^2$$

$$(\cos x)^2 = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Wektor Poyntinga



Szybkość przepływu energii przez jednostkę powierzchni jest opisywana przez wektor Poyntinga:

$$\vec{S} = \frac{dU}{dt dA} \vec{j} = u \cdot \vec{v}$$

Pokażemy, że:

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$S(x, t) = \frac{E(x, t) \cdot B(x, t)}{\mu\mu_0} = \frac{E^2(x, t)}{v\mu\mu_0} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2(x, t)}{v\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} = \frac{u(x, t)}{v} v^2 =$$

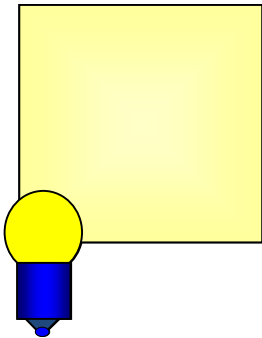
$$= v \cdot u(x, t) = \frac{1}{dA} \cdot \frac{dU}{dt}$$

$$u(x, t) = \epsilon\epsilon_0 E^2(x, t)$$

Natężenie fali elektromagnetycznej

Natężenie fali I jest to średnia szybkość z jaką fala elektromagnetyczna przenosi energię przez powierzchnię prostopadłą do kierunku propagacji fali, dzielona przez powierzchnię, zatem jest to wartość średnia wektor Poyntinga po czasie równym okresowi fali:

$$I = \left(\frac{1}{dA} \cdot \frac{dU}{dt} \right)_{\dot{s}r} = S_{\dot{s}r} = v \cdot u_{sr}$$



$$\begin{aligned} I &= v \cdot u_{\dot{s}r} = v \cdot \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E_m^2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} \cdot \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E_m^2 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} E_m^2 = \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_m^2 \end{aligned}$$

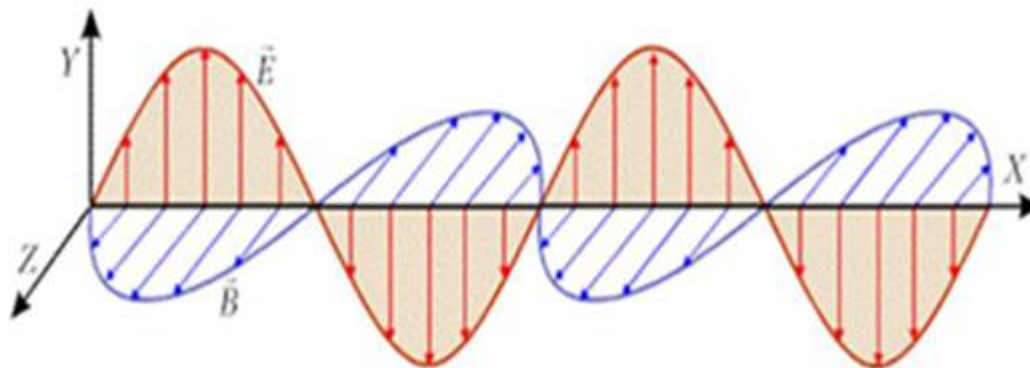
Natężenie światła:

$$I \sim E_m^2$$

przy założeniu, że

$$\mu \cong 1 \quad \rightarrow \quad n = \sqrt{\epsilon}$$

Prędkość fazowa fali em.



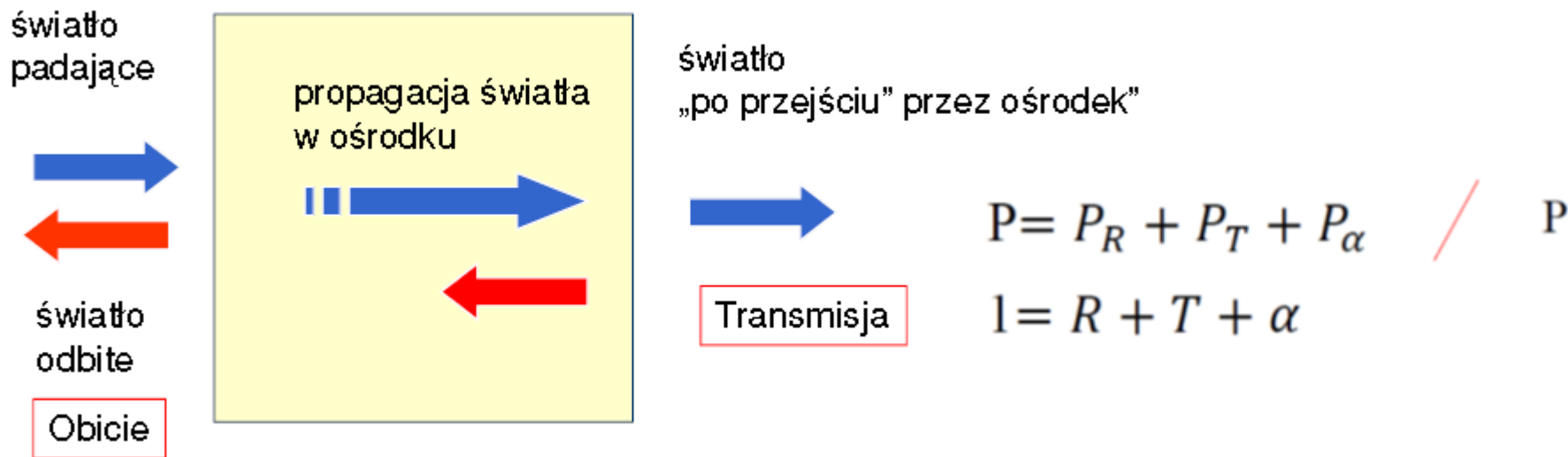
W próżni

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$$

W ośrodku

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n}$$

Oddziaływanie światła z materią



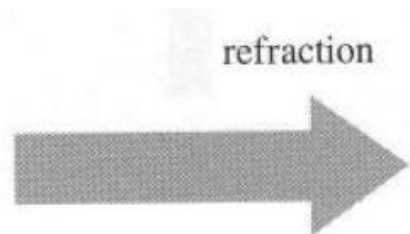
Prawo Lamberta-Beera:

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}$$

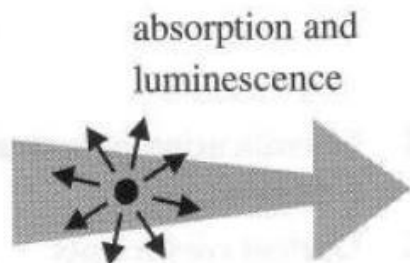
Przy założeniu, że współczynnik odbicia R od przedniej i tylnej ścianki jest taki sam przy przejściu przez ośrodek o grubości z , współczynnik transmisji T jest równy:

$$T = (1 - R)^2 \exp(-\alpha z)$$

Oddziaływanie światła z materią

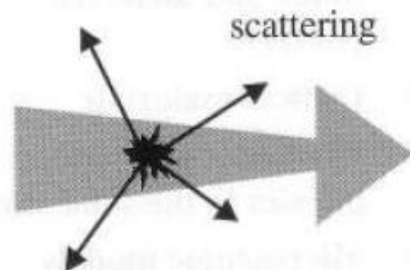


Załamanie – zmniejszenie prędkości światła w ośrodku; intensywność pozostaje bez zmian. Załamanie opisuje prawo Snelliusa.



Absorpcja – jeśli częstość światła jest bliska częstości przejść optycznych w ośrodku; intensywność światła maleje.

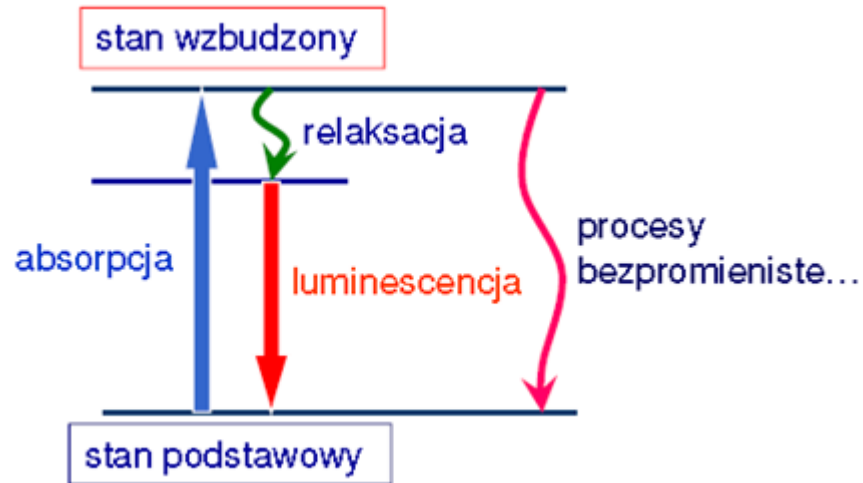
Luminescencja – emisja światła przez wzbudzony ośrodek; nie zawsze towarzyszy absorpcji, ponieważ zmagazynowana energia może zostać zamieniona na ciepło zanim nastąpi emisja.



Rozpraszanie światła - liczba fotonów nie ulega zmianie, ale intensywność światła w kierunku propagacji maleje ponieważ część fotonów zmienia kierunek.
Rozpraszanie: elastyczne i nieelastyczne.

Jeśli intensywność światła jest bardzo duża, pojawiają się efekty nieliniowe.

Absorpcja i luminescencja



Przesunięcie Stokesa

Energia fotonu emitowanego jest mniejsza od energii fotonu zaabsorbowanego, zatem częstość światła emitowanego jest mniejsza od częstości światła absorbowanego. To zmniejszenie częstości światła emitowanego w stosunku do częstości światła absorbowanego nazywa się przesunięciem Stokesa.

Rozpraszanie światła i absorpcja

Rozpraszanie ma miejsce, gdy światło natrafia na cząsteczki o rozmiarach rzędu długości fali. Intensywność wiązki światła, która ulega rozproszeniu jest dana wzorem:

$$I(z) = I_0 e^{-N\sigma_s z}$$

gdzie N koncentracja centrów rozpraszających, σ_s – przekrój czynny na rozpraszanie. W kryształach mogą to być np. defekty, domieszki, niejednorodności. Wzór podobny do wzoru opisującego absorpcję światła.

Dla rozpraszania elastycznego (Rayleigh'a):

$$\sigma_s(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda^4}$$

Oddziaływanie światła z materią

Właściwości optyczne ośrodka absorbującego światło opisuje zespolona funkcja dielektryczna

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_1 + i\epsilon_2$$

Ponieważ $\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\epsilon}} \longrightarrow \tilde{n} = n + i\kappa$

gdzie κ to współczynnik ekstynkcji.

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$n^2 - \kappa^2 = \epsilon_1$$

$$2n\kappa = \epsilon_2$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2})^{1/2}$$

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2})^{1/2}$$

Małe κ - ośrodek
przezroczysty



$$n = \sqrt{\epsilon_1} \quad \kappa = \frac{\epsilon_2}{2n}$$

Pochłanianie światła (absorpcja)

Założmy, że na substancję pada płaska fala elektromagnetyczna monochromatyczna:

$$E = E_0 e^{i(kx - \omega t)} = E_0 e^{i\omega(\frac{x}{v} - t)} = E_0 e^{i\omega(\frac{x}{c}\tilde{n} - t)}$$
$$= E_0 \underbrace{e^{i\omega(\frac{x}{c}\tilde{n} - t)}}_{\text{zmiana fazy}} \underbrace{e^{-\frac{\omega\kappa x}{c}}}_{\text{pochłanianie}} \quad \longrightarrow \quad \kappa - \text{opisuje pochłanianie fali w ośrodku}$$

Prędkość fazowa jest zdefiniowana przez część rzeczywistą wsp. załamania: $v = c/n$

$$I \sim E_m^2 \quad I = I_0 e^{-2\frac{\omega\kappa}{c}x} = I_0 e^{-\alpha x} \quad \text{prawo Lamberta – Beera}$$

$\alpha = \frac{2\omega\kappa}{c}$ - współczynnik pochłaniania zwany także współczynnikiem absorpcji.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ nie zależy od długości fali, κ zależy od λ , więc α też zależy od λ

n i k oraz R i α

Pokażemy dalej, że współczynnik odbicia przy prostopadłym padaniu światła jest dany wzorem:

$$R = \left| \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right|^2 = \frac{(n - 1)^2 + \kappa^2}{(n + 1)^2 + \kappa^2}$$

Współczynnik absorpcji:

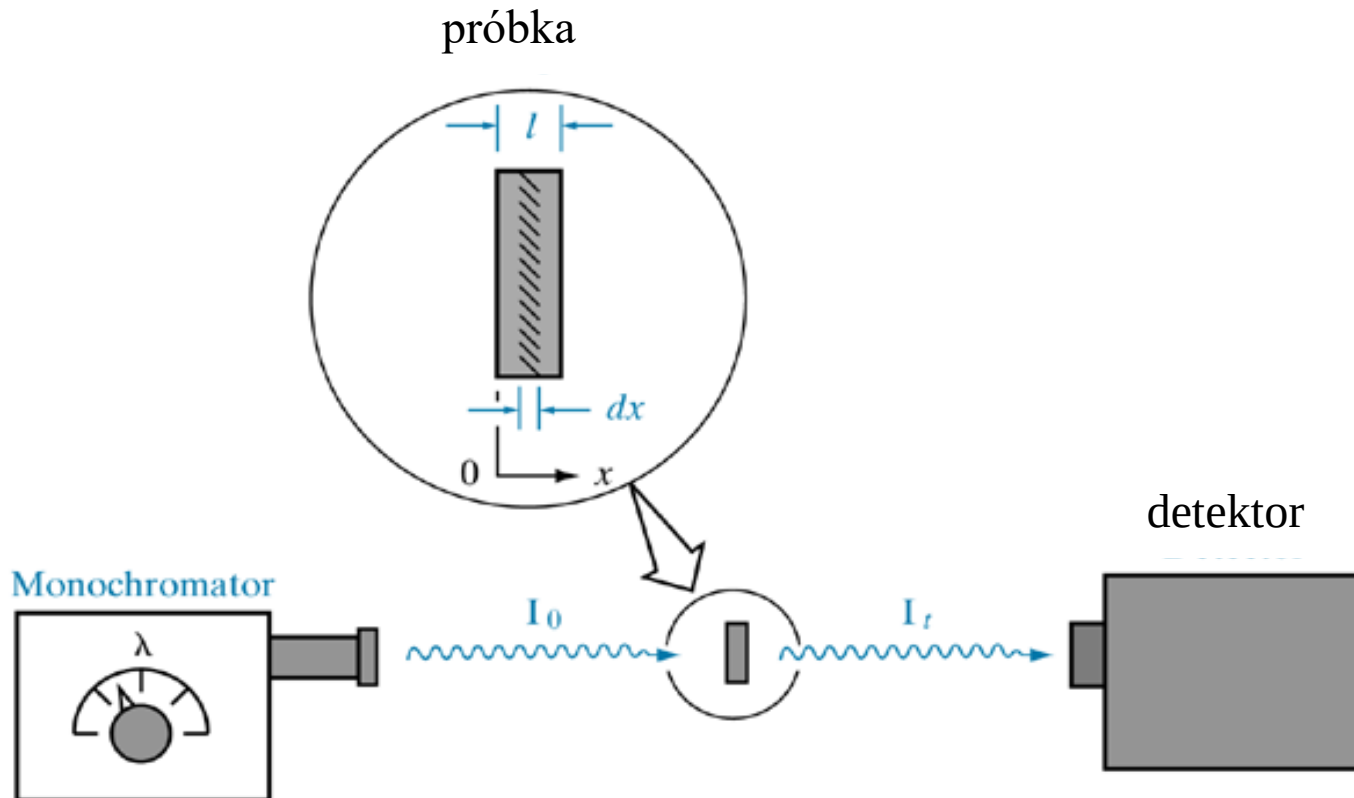
$$\alpha = \frac{2\omega\kappa}{c}$$

Wszystkie wielkości charakteryzujące odpowiedź danego ośrodka na pole elektromagnetyczne są funkcjami częstości ω !

W ośrodkach przezroczystych pochłanianie jest bardzo słabe i κ jest bardzo małe. Stąd zwykle stabelaryzowane współczynniki załamania oraz funkcja dielektryczna dla tych ośrodków są rzeczywiste.

Pomiar współczynnika absorpcji

$$I_T = I_0(1 - R)^2 e^{-\alpha x} \longrightarrow \alpha$$



Absorpcja

$$I_T = I_0(1 - R)^2 e^{-\alpha x}$$

Wielkość, która określa jak światło o określonej λ wnika do ośrodka nazywa się głębokością wnikania:

$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

Laser (nm)	Penetration depth (nm)	
λ	Si	Ge
633	3000	29
514	762	22
457	313	19
325	~10	~9
244	~7	~8

Dla tej głębokości transmitancja przy założeniu, że $R = 0$: $T = \frac{I_T}{I_0} = \frac{1}{e}$

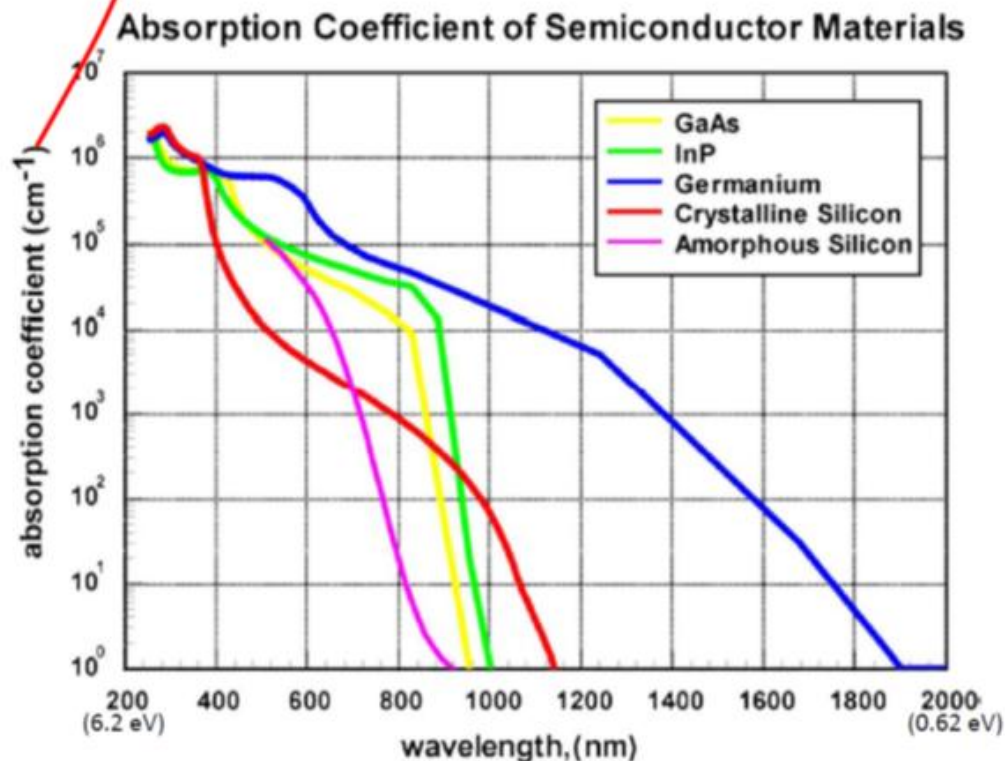
$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Gęstość optyczna (absorbancja) $O.D. = -\log\left(\frac{I(l)}{I_0}\right) = -\log T = \frac{\alpha l}{\ln 10} = 0,434\alpha l$

Absorbancja naturalna, ekstynkcja $E = \ln \frac{I_0}{I_T}$

Współczynnik absorpcji

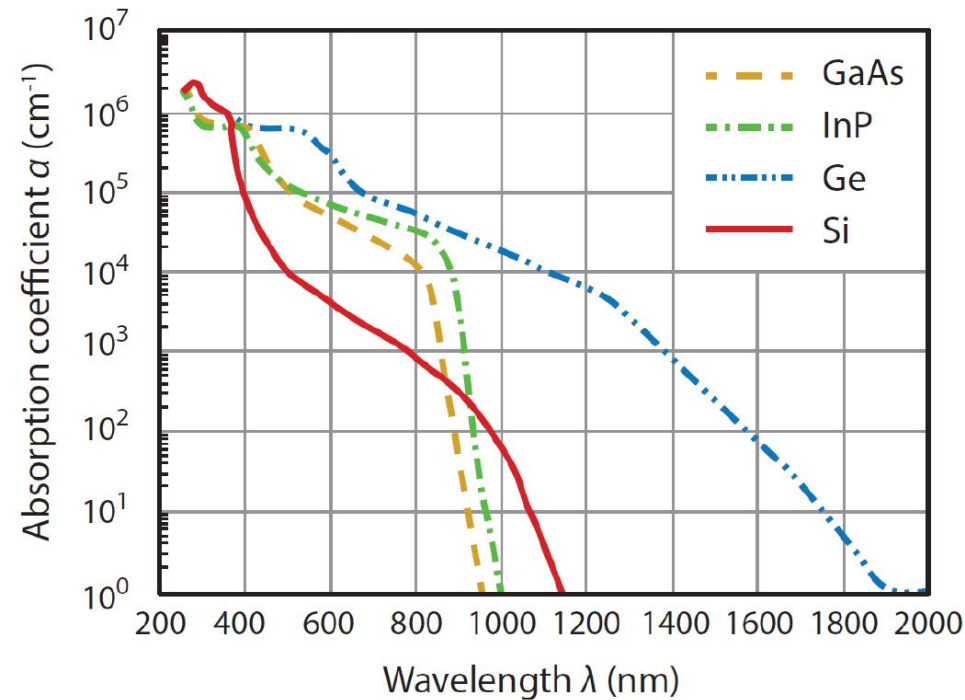
$$I = I_0 \cdot e^{-\alpha \cdot l}$$



Półprzew.	E_g [eV] w 300K
Si krystal.	1,12
Si amorf.	1,7-1,8
Ge	0,66
GaAs	1,43
InP	1,29

- W Si przejścia proste są dopiero dla $\lambda < 400\text{nm}$
- Aby zaabsorbować taką samą ilość światła grubość warstwy Si musi być znacznie większa od grubości GaAs.

Współczynnik absorpcji



$$\alpha_{Si}(400\text{nm}) = 9 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1}$$

$$\alpha_{Si}(700\text{nm}) = 2 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1}$$

$$I_x = I_0 e^{-\alpha x} \longrightarrow \ln\left(\frac{I_x}{I_0}\right) = -\alpha x$$

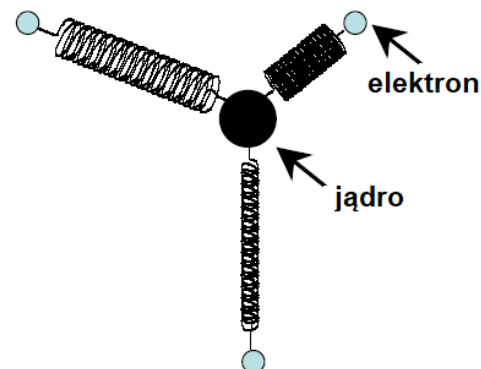
$$\ln(0.1) = -9 \cdot 10^4 x \quad x = 0.26 \mu\text{m}$$

$$\ln(0.1) = -2 \cdot 10^3 x \quad x = 11.5 \mu\text{m}$$

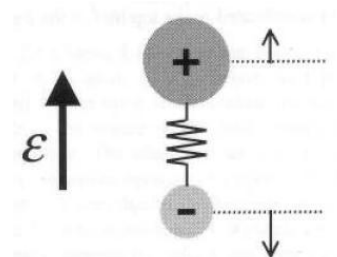
$$\ln 10 = 2,3$$

Oscylator harmoniczny w ciele stałym

Półprzewodnik lub izolator
Oscylator - elektron związany



Molekuły polarne (NaCl, H₂O),
kryształy jonowe, drgania sieci



Metal
Elektrony swobodne

Dielektryk w polu elektrycznym

Wektor polaryzacji

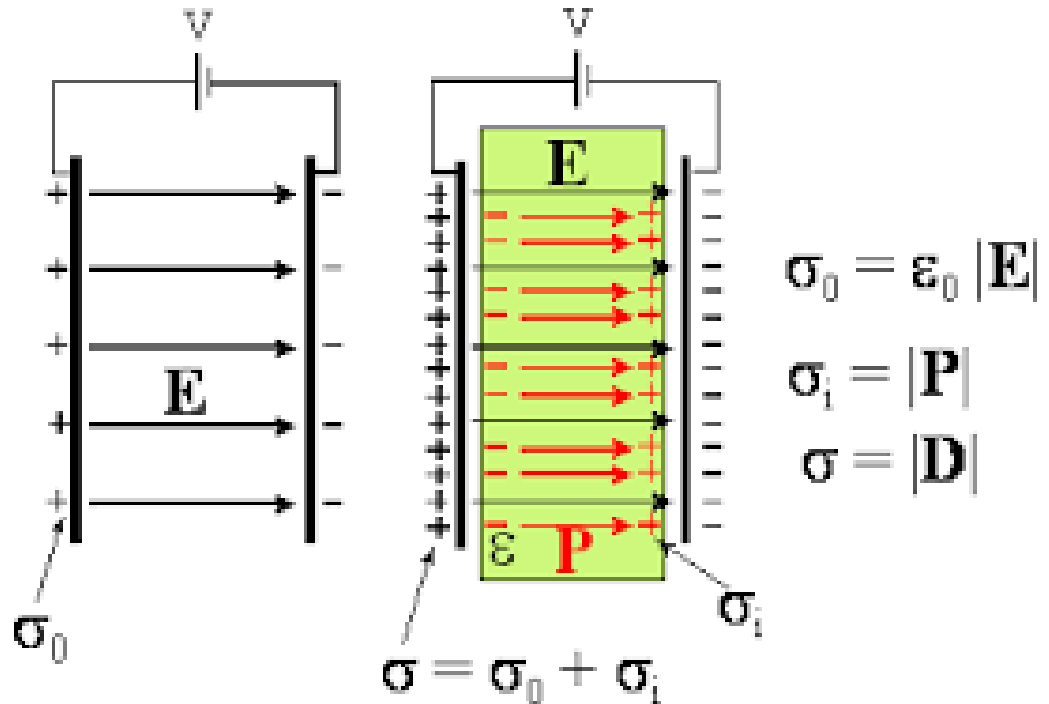
Moment dipolowy



$$\vec{p} = -e\vec{d}$$

Wektor polaryzacji

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$$



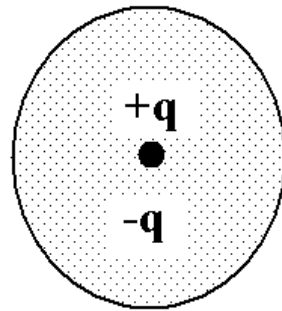
$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

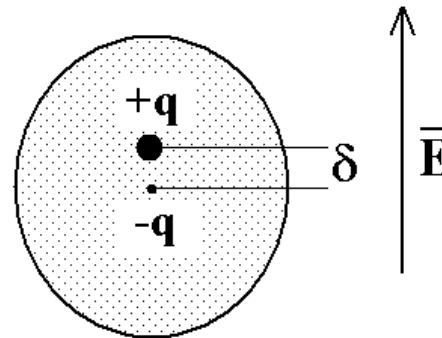
$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi$$

Oscylator Lorentza



a) model atomu



b) atom w polu elektrycznym

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{\mu}} \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_J} \qquad m_J \gg m_0 \Rightarrow \mu \approx m_0$$

μ -masa zredukowana, m_0 masa elektronu, m_J masa jądra

δ rozsuniecie ładunków q i $-q$ w atomie, głównie przesunięcie elektronu ze względu na fakt, że $m_J \gg m_0$.

Dielektryki

Oscylator Lorentza z siłą tłumiącą, o częstości bliskiej ω_0

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = -eE \quad E(t) = E_0 \cos \omega t = E_0 \operatorname{Re}(e^{-i(\omega t + \phi)})$$

Szukamy rozwiązania postaci: $x(t) = X_0 \operatorname{Re}(e^{-i(\omega t + \phi')})$.

Jeśli fazę uwzględnimy w zespolonych amplitudach X_0 i E_0 , to $x(t) = X_0 e^{-i\omega t}$ i

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t} \quad \longrightarrow$$

$$-m\omega^2 X_0 e^{-i\omega t} - im\omega\gamma X_0 e^{-i\omega t} + m\omega_0^2 X_0 e^{-i\omega t} = -eE_0 e^{-i\omega t}$$

$$X_0 = \frac{-eE_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Rezonansowa polaryzacja indukowana światłem dla N atomów/jedn. objętości:

$$P_{rez} = Np(t) = -eNx(t) = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E$$

gdzie $p(t)$ – moment dipolowy.

Dielektryki

Indukcja elektryczna $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \left(\frac{F}{m}\right)$ - przenikalność elektryczna próżni

ε_r - względna przenikalność elektryczna – funkcja dielektryczna

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_{inne} + \vec{P}_{rez} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} + \vec{P}_{rez}$$

Z porównania powyższych wzorów otrzymujemy:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \chi + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

Funkcja dielektryczna w granicach

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Statyczna funkcja dielektryczna
 $\omega \ll \omega_0$

$$\varepsilon_r(0) \equiv \varepsilon_{\text{st}} = 1 + \chi + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^2}$$

Dla bardzo dużych częstości
 $\omega \gg \omega_0$

$$\varepsilon_r(\infty) \equiv \varepsilon_{\infty} = 1 + \chi$$

Ponieważ

$$\varepsilon_{\text{st}} - \varepsilon_{\infty} = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^2}, \text{ to}$$

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_{\infty} + (\varepsilon_{\text{st}} - \varepsilon_{\infty}) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

W pobliżu rezonansu $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$

W równaniu:

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \chi + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad \text{podstawiamy } \omega = \omega_0 + \Delta\omega$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1(\Delta\omega) = 1 + \chi + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0} \frac{\omega_0^2 - (\omega_0 + \Delta\omega)^2}{[\omega_0^2 - (\omega_0 + \Delta\omega)^2]^2 + \gamma^2(\omega_0 + \Delta\omega)^2}$$

Po przekształceniach zakładając, że $\Delta\omega^2 \cong 0$ oraz $\omega \cong \omega_0 \gg \gamma$ otrzymujemy:

$$\varepsilon_1(\Delta\omega) = \varepsilon_\infty - (\varepsilon_{st} - \varepsilon_\infty) \frac{2\omega_0\Delta\omega}{4(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}$$

Tak samo postępujemy obliczając $\varepsilon_2(\Delta\omega)$ i otrzymujemy:

$$\varepsilon_2(\Delta\omega) = (\varepsilon_{st} - \varepsilon_\infty) \frac{\gamma\omega_0}{4(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}$$

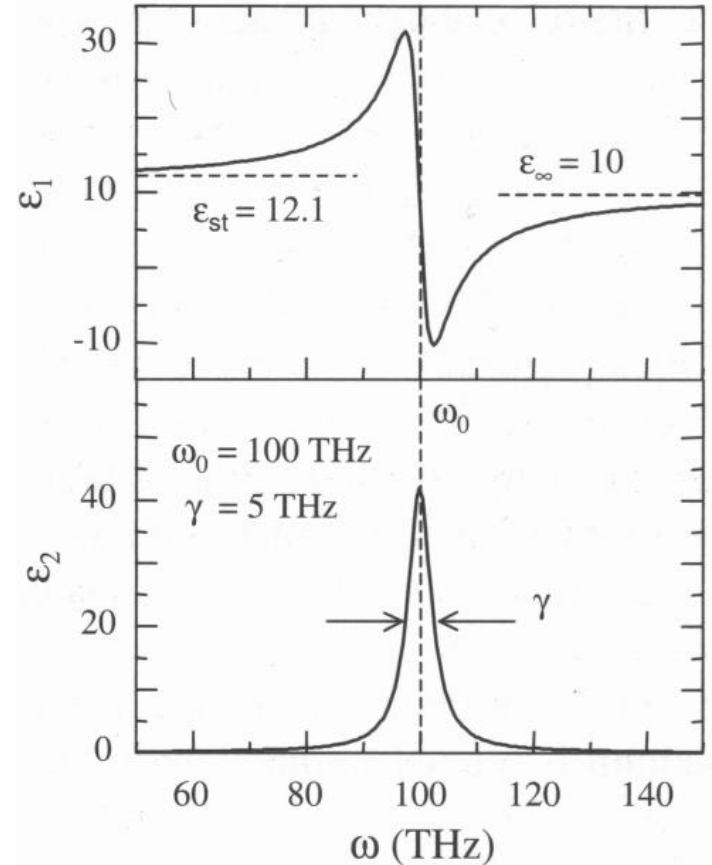
Funkcja dielektryczna

W pobliżu rezonansu:

$$\varepsilon_1(\Delta\omega) = \varepsilon_\infty - (\varepsilon_{st} - \varepsilon_\infty) \frac{2\omega_0\Delta\omega}{4(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}$$

$$\varepsilon_2(\Delta\omega) = (\varepsilon_{st} - \varepsilon_\infty) \frac{\gamma\omega_0}{4(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}$$

Te równania opisują ostrą linię absorpcyjną przy częstotliwości ω_0 o szerokości połówkowej γ

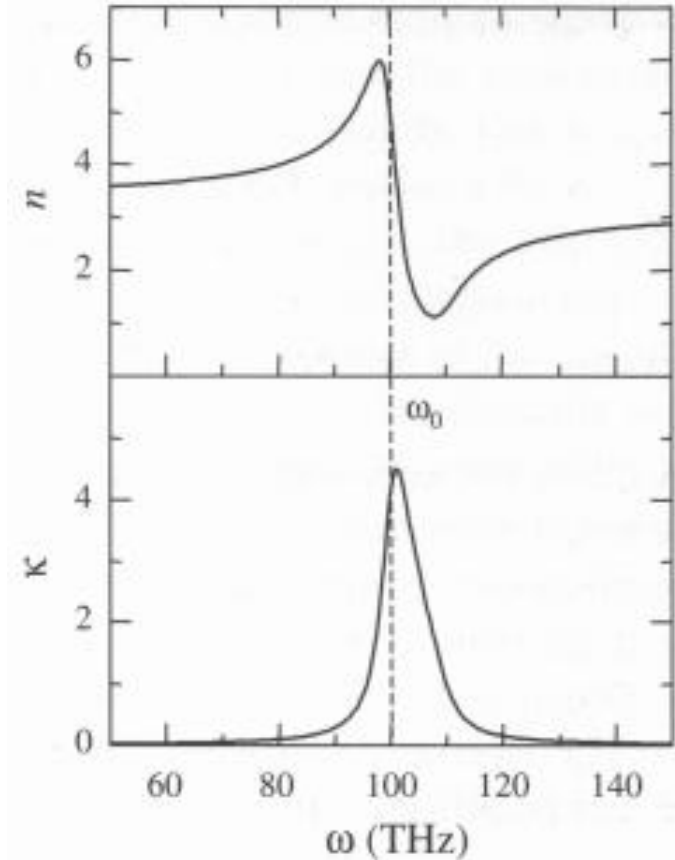
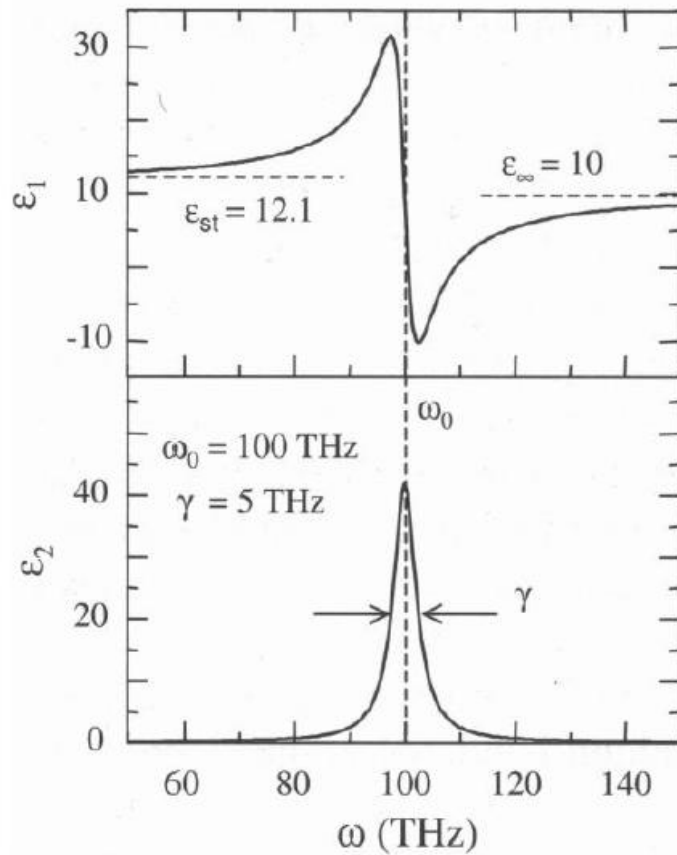


Lorentzian

n i κ

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2})^{1/2}$$

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2})^{1/2}$$



Wiele częstości rezonansowych

Gdy ośrodek posiada wiele częstości rezonansowych ω_{0j} :

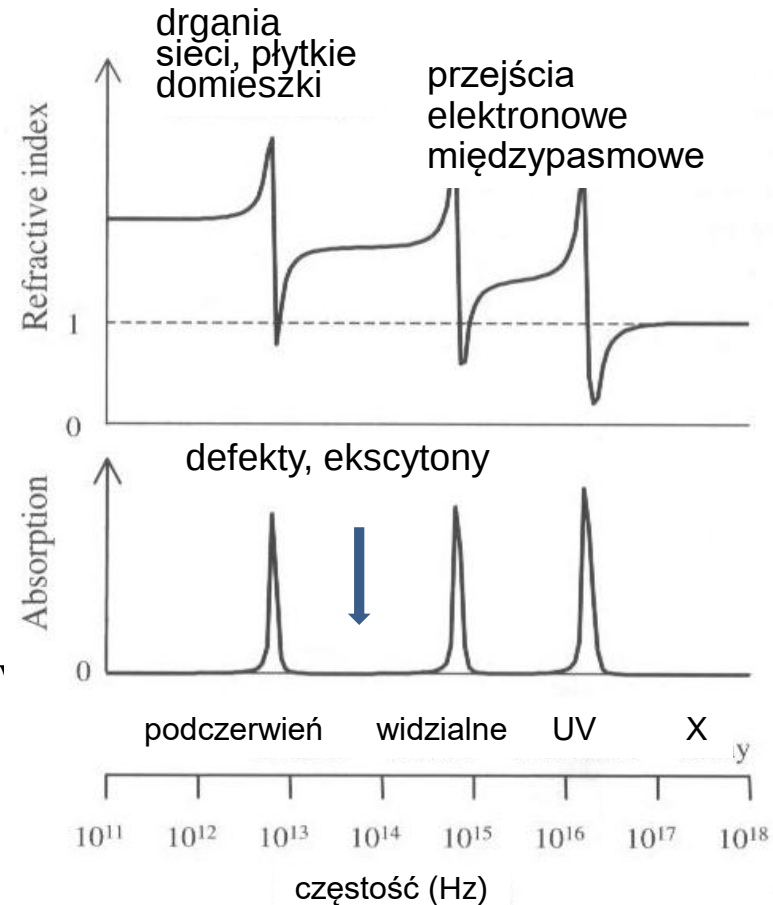
$$\vec{P}_{rez} = \frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{1}{\omega_{j0}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \vec{E}$$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{1}{\omega_{j0}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}$$

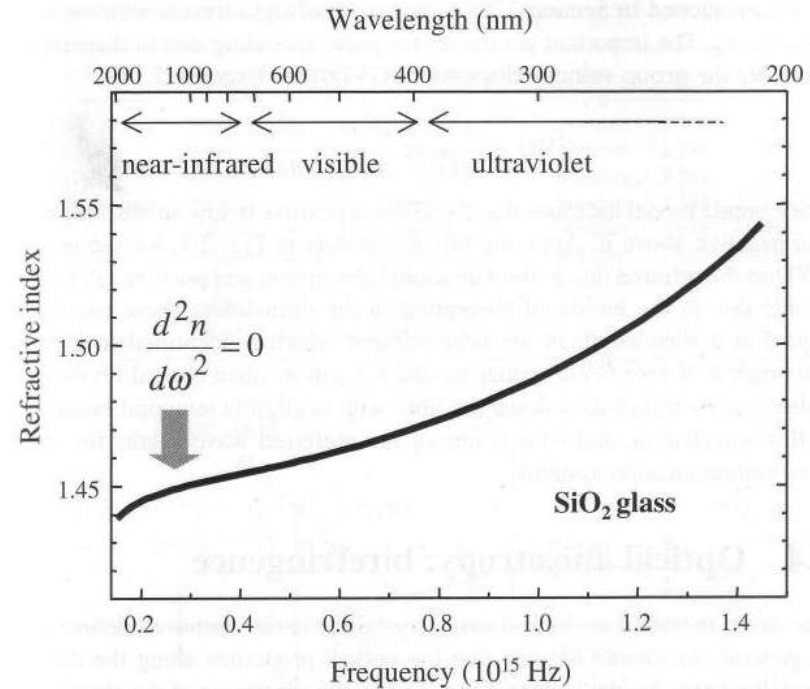
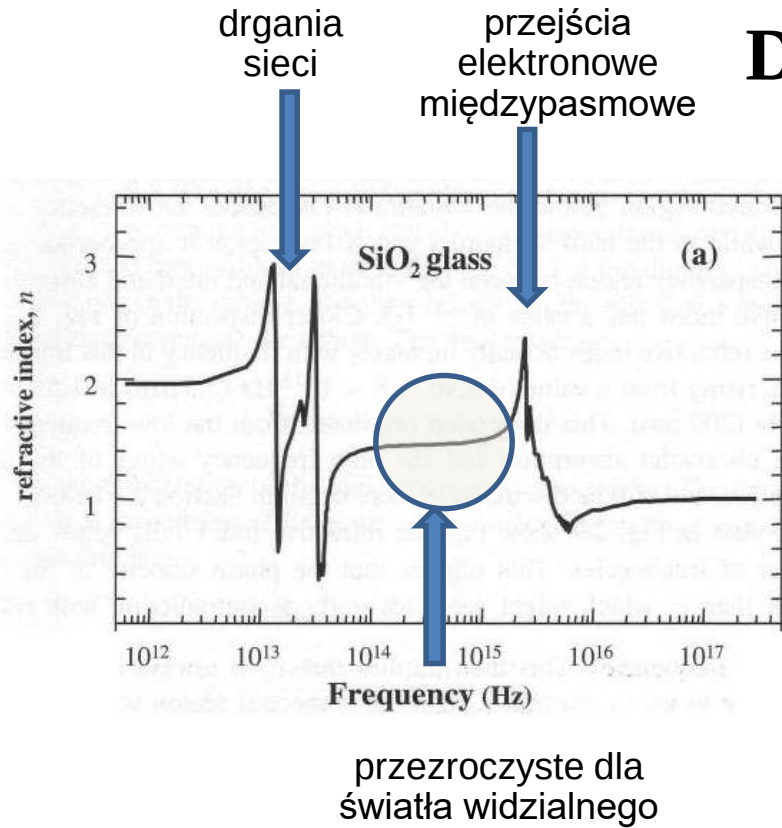
Aby uwzględnić różny wkład od różnych oscylatorów wprowadza się siłę oscylatora f_j

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega)}$$

Częstości rezonansowe ω_{0j} to częstości własne układu (istnieją niezależnie od tego, czy układ oddziałuje z polem fali świetlnej, czy nie).



Dyspersja



Dyspersja normalna $\frac{dn}{d\omega} > 0$

Dyspersja anomalna $\frac{dn}{d\omega} < 0$

Parametr, który decyduje o dyspersji prędkości grupowej $D = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2}$.

Długość fali dla której $\frac{d^2n}{d\omega^2} = 0$ dla SiO₂ $\lambda = 1300nm$.

Prędkość grupowa

Impuls światła jest transmitowany w ośrodku z prędkością grupową $v_g = \frac{d\omega}{dk}$:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \quad \longrightarrow \quad k = \frac{\omega n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{d(\frac{\omega n}{c})}{d\omega} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} = \frac{1}{v} \left(1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \right)$$

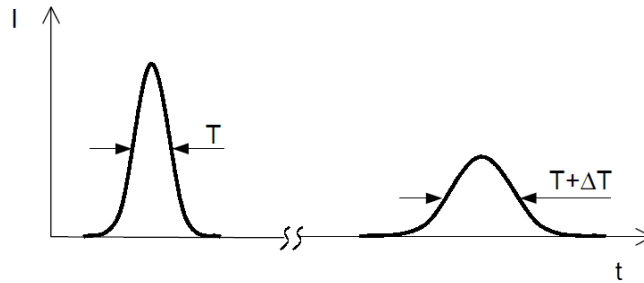
$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega n} \quad \frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{2\pi c}{n\omega^2} \quad \frac{dn}{d\omega} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{dn}{d\lambda} \frac{2\pi c}{n\omega^2}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v \left(1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \right)^{-1} = v \left(1 - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)^{-1}$$

W paczce falowej znajdują się fale różniące się częstotliwościami lub wektorami falowymi. Te fale rozchodzą się z różnymi szybkościami. To prowadzi do dyspersji prędkości grupowej.

GVD

Jeśli w ośrodku występuje dyspersja prędkości grupowej, to następuje poszerzenie impulsu w miarę jak impuls przemierza ten ośrodek.



Czasowe poszerzenie impulsu związane z dyspersją prędkości grupowej jest opisywane współczynnikiem dyspersji prędkości grupowej (ang. GVD – group velocity dispersion):

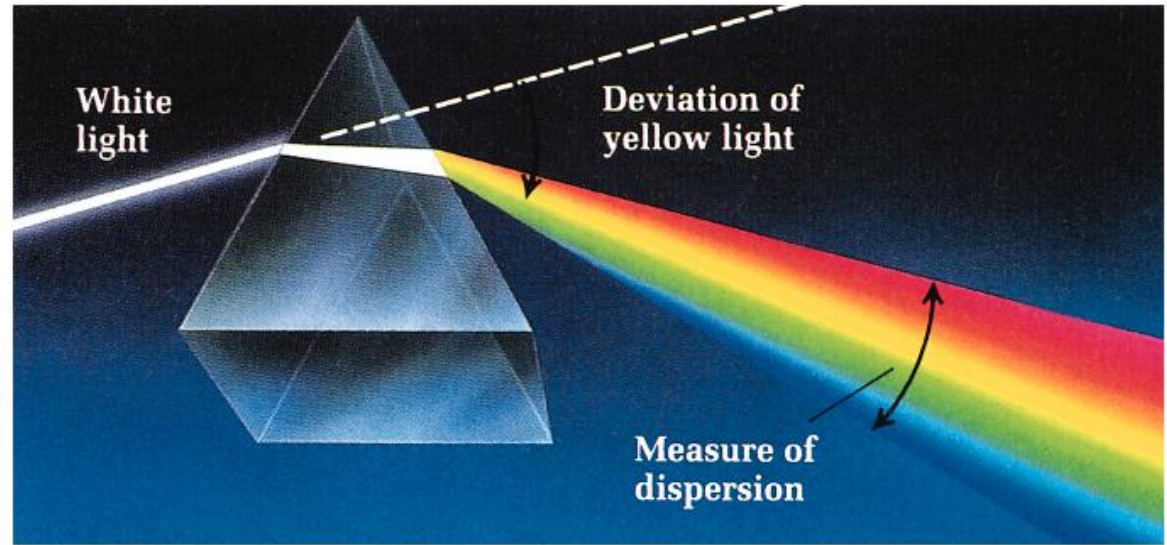
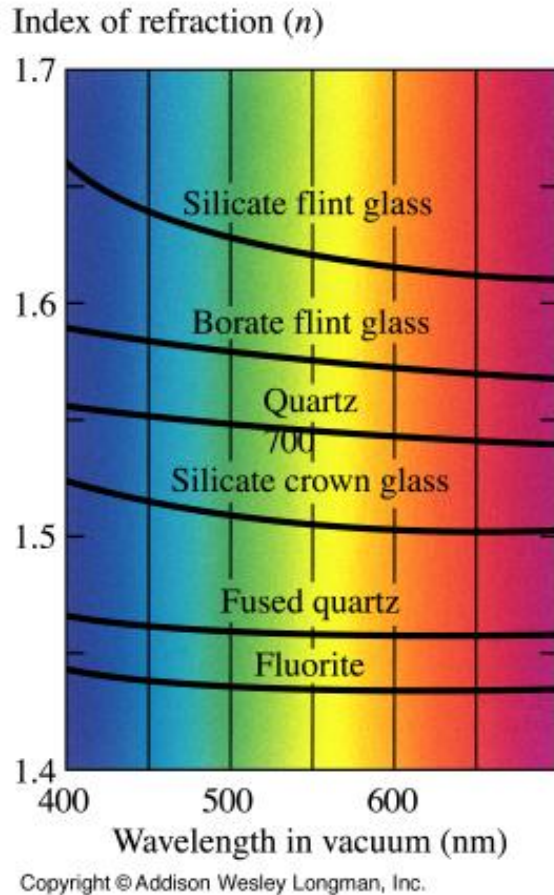
$$D = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2}$$

Poszerzenie czasowe impulsu związane z dyspersją powoduje trudności w transmisji bardzo krótkich impulsów przez światłowód (rzędu *ps*).

Długość fali dla której $\frac{d^2 n}{d\omega^2} = 0$ dla SiO_2 $\lambda = 1300\text{nm}$. Dlatego jest to preferowana długość fali w telekomunikacji.

Dyspersja (rozszczerpiecie)

$$n = f(\lambda)$$



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{1}{\omega_{j0}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \quad \Rightarrow$$

$$n^2 = 1 + \sum_j \frac{A_j \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_j^2)} \quad \Rightarrow \quad n = C_1 + \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{C_3}{\lambda^4} + \dots$$

Równ. Sellmayer'a

Równ. Cauchy'ego